

2019年天津河西区高三一模理科数学试卷

一、选择题

爱智 (本大题共8小题, 每小题5分, 共40分)

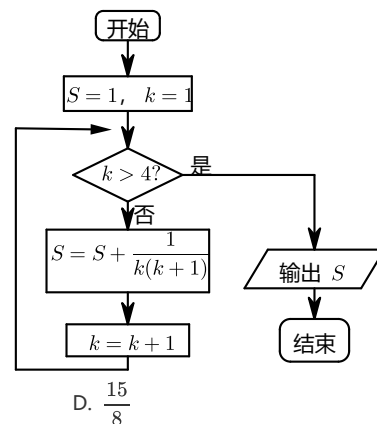
1. 设集合 $S = \{x \mid x > -2\}$, $T = \{x \mid x^2 + 3x - 4 \leq 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} S) \cup T = ()$.

- A. $(-2, 1]$ B. $(-\infty, -4]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $[1, +\infty)$

2. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2x \\ x + y \leq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$, 则 $x + 2y$ 的最大值是 ().

- A. $-\frac{5}{2}$ B. 0 C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{2}$

3. 某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的值是 ().



- A. $\frac{9}{5}$ B. $\frac{11}{6}$ C. $\frac{13}{7}$ D. $\frac{15}{8}$

4. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则 “ $|x+1| < 1$ ” 是 “ $x^{-1} < \frac{1}{2}$ ” 的 ().

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 设 $a = \log_3 e$, $b = e^{15}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$, 则 ().

- A. $b < a < c$ B. $c < a < b$ C. $c < b < a$ D. $a < c < b$

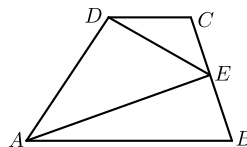
6. 以下关于函数 $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ 的命题, 正确的是 ().

- A. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{2}{3}\pi)$ 上单调递增
B. 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴
C. 点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心
D. 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位, 可得到 $y = \sqrt{2} \sin 2x$ 的图象

7. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $M(1, m) (m > 0)$ 到其焦点的距离为5, 双曲线 $\frac{x^2}{a} - y^2 = 1$ 的左顶点为 A , 若双曲线的一条渐近线与直线 AM 平行, 则实数 a 的值是 ().

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{25}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{3}$

8. 如图梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$ 且 $AB = 5$, $AD = 2DC = 4$, E 在线段 BC 上, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的最小值为 ().



A. $\frac{15}{13}$

B. $\frac{95}{13}$

C. 15

D. $-\frac{15}{13}$

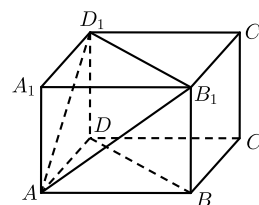
二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

9. i 是虚数单位, 若复数 z 满足 $(3 - 4i)z = 5$, 则 $z =$ _____ .

10. 二项式 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中常数项为 _____ .

11. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 3\text{cm}$, $AA_1 = 2\text{cm}$, 则四棱锥 $A - BB_1D_1D$ 的体积为 _____ cm^3 .



12. 已知圆的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$, 圆心为 C , 点 P 的极坐标为 $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$, 则 CP 的长度为 _____ .

13. 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $2x + 8y - xy = 0$, 则 xy 的最小值为 _____ .

14. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1) \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$ 且 $f(x+2) = f(x)$, $g(x) = \frac{2x+5}{x+2}$, 则方程 $f(x) = g(x)$ 在区间 $[-5, 1]$ 上的所有实根之和为 _____ .

三、解答题

(本大题共6小题, 共80分)

15. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 对应的边为 a, b, c , 已知 $a \cos C + \frac{1}{2}c = b$.

(1) 求角 A .

(2) 若 $b = 4$, $c = 6$, 求 $\cos B$ 和 $\cos(A + 2B)$ 的值.

16. PM2.5是指大气中直径小于或等于2.5微米的颗粒物，也称为可入肺颗粒物．虽然PM2.5只是地球大气成分中含量很少的组分，但它对空气质量和能见度等有重要的影响．我国PM2.5标准如下表所示．我市环保局从市区四个监测点2018年全年每天的PM2.5监测数据中随机抽取15天的数据作为样本，监测值如茎叶图如图所示．

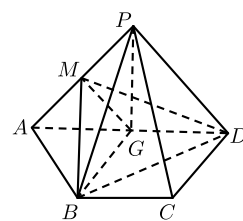
我市空气质量

PM2.5日均值（微克/立方米）范围	空气质量级别
(1, 35]	I
(35, 75]	II
大于75	超标

	PM2.5 日均值(微克/立方米)			
2	5	8		
3	1	7	3	4
4	4	5		
6	8	3		
7	7	9		
8	3	6		
9	2			

- (1) 求这15天数据的平均值；
- (2) 从这15天的数据中任取3天的数据，记表示其中空气质量达到一级的天数 ξ ，求 ξ 的分布列和数学期望；
- (3) 以这15天的PM2.5日均值来估计一年的空气质量情况，则一年（按360天计算）中大约有多少天的空气质量达到一级．

17. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp DC$, $AD = 4$, $DC = BC = 2$, G 为线段 AD 的中点, $PG \perp$ 平面 $ABCD$, $PG = 2$, M 为线段 AP 上一点 (M 不与端点重合).



(1) 若 $AM = MP$,

1 求证: $PC \parallel$ 平面 BMG .

2 求直线 PB 与平面 BMG 所成的角的大小.

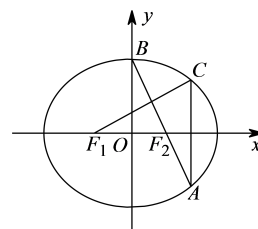
(2) 是否存在实数 λ 满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP}$, 使得平面 BMD 与平面 ADP 所成的锐角为 $\frac{\pi}{3}$, 若存在, 确定 λ 的值, 若不存在, 请说明理由.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中, F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 顶点 B 的坐标为 $(0, b)$, 连结 BF_2 并延长交椭圆于点 A , 过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C , 连结 F_1C .



- (1) 若点 C 的坐标为 $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$, 且 $BF_2 = \sqrt{2}$, 求椭圆的方程.
- (2) 若 $F_1C \perp AB$, 求椭圆离心率 e 的值.

20. 已知函数 $f(x) = e^x + x^2 - x$, $g(x) = x^2 + ax + b$ ($a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$) .

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 的单调区间.

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线 l 与曲线 $y = g(x)$ 切于点 $(1, c)$, 求 a , b , c 的值.

(3) 若 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求 $a + b$ 的最大值.